Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupes de GL(E). Applications

Références : Rombaldi, Perrin, CVA (pour le dev), Mansuy (pour la conjugaison …)

I - Généralités sur le groupe linéaire

1) Définitions et premières propriétés

2) Déterminant et groupe spécial linéaire

3) Cas d'un corps fini

II - Etude de GL(E)

1) Générateurs de GL(E) et SL(E) : dilatations et transvections

2) Groupes projectifs et sous-groupes dérivés

III - Actions de groupes sur les espaces de matrices

1) Action par translation : pivot de Gauss

2) Action par équivalence

3) Action par conjugaison

4) Action par congruence

IV - Le groupe orthogonal

DEV 1 : Cône nilpotent sur $\mathbb{F}_q$

DEV 2 : Générateurs de $GL_n(K)$, $SL_n(K)$ + connexité

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un vectoriel de dimension finie E. Sous-groupes de $GL(E)$. Applications

Soit K un corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Généralités sur le groupe linéaire

1) Définitions et premières propriétés [ROM]

DEF 1 : On appelle groupe linéaire de E et on note $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E inversibles. C'est un groupe pour la composition $\circ$. L'ensemble $GL_n(K)$ des matrices inversibles à coefficients dans K est un groupe pour $\times$.

PROP 2 : Le choix d'une base $\mathcal{B}$ de E permet de réaliser un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ sur $GL_n(K)$.

THM 3 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes : (1) $u \in GL(E)$ (2) $\ker(u) = \{0_E\}$ (3) $\mathrm{Im}(u) = E$ (4) $\mathrm{rg}(u) = n$ (5) $\det(u) \neq 0$ (6) u transforme toute base de E en une base de E. (7) $\exists v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = Id$ (8) $\exists w \in \mathcal{L}(E)$, $w \circ u = Id$.

EX 4 : Pour $\lambda \in K^*$, l'homothétie $x \mapsto \lambda x \in GL(E)$.

2) Déterminant et groupe spécial linéaire [ROM]

PROP 5 : L'application $\det : GL(E) \to K^*$ est un morphisme de groupes.

DEF 6 : Le groupe spécial linéaire est défini par : $SL(E) = \ker(\det) = \{u \in GL(E) \mid \det(u) = 1\}$.

THM 7 : $SL(E)$ est un sous-groupe distingué de $GL(E)$ isomorphe à $SL_n(K)$. Le groupe quotient $GL(E)/SL(E)$ est isomorphe à K^* et on a la suite exacte $\{Id\} \to SL(E) \to GL(E) \to K^* \to \{1\}$

THM 8 : On a $Z(GL(E)) = K^* Id$ et $Z(SL(E)) = \mu_n(K) . Id$ où $\mu_n(K)$ est le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans K^*.

3) Cas d'un corps fini [ROM]

Soit $\mathbb{F}_q$ l'unique corps à $q = p^m$ éléments à isomorphisme près (p premier, $m \in \mathbb{N}^*$).

THM 9 : Pour tout $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\# GL_n(\mathbb{F}_q) = \prod_{k=1}^{n} (q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} (q^k - 1)$$
$$\# SL_n(\mathbb{F}_q) = q^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=2}^{n} (q^k - 1)$$

COR 10 : Pour tout $p \in [\![1; n]\!]$, il y a :
$$\frac{\prod_{k=n-p+1}^{n} (q^k - 1)}{\prod_{k=1}^{p} (q^k - 1)}$$
sous-espaces vectoriels de dimension p dans E.

PROP 11 : L'ensemble $T_n(\mathbb{F}_p)$ des matrices triangulaires supérieures dont les termes diagonaux sont égaux à 1 est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ de cardinal $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$

LEMME 12 : (Fitting) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les suites $(\ker(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante et stationnent à partir d'un même rang n_0. On a $E = \ker(u^{n_0}) \oplus \mathrm{Im}(u^{n_0})$ et $v = u_{|\ker(u^{n_0})}$ est nilpotent, $w = u_{|\mathrm{Im}(u^{n_0})}$ est bijectif.

DEF 13 : La donnée de $((F, G), v, w)$ avec $E = F \oplus G$, $v \in \mathcal{L}(N)$, $w \in \mathcal{L}(G)$, v nilpotent, w bijectif est appelée décomposition de Fitting.

[CAL] [CVA]

DEV 1

THM 14 : Soit $\mathcal{N}_d(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices nilpotentes de taille d à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Alors : $\# \mathcal{N}_d(\mathbb{F}_q) = q^{d(d-1)}$

II - Étude de $GL(E)$

1) Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$: dilatations et transvections [PER] [ROM]

REM 15 : On cherche des générateurs les plus simples possibles, donc ayant, comme les transpositions dans $\mathfrak{S}_n$, le plus de points fixes possibles, c'est-à-dire, ici un hyperplan.

PROP 16 : Soit H un hyperplan de E et soit $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = Id_H$. LASSE :
(i) $\det(u) = \lambda \neq 1$ (ii) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ (donc une droite propre D pour λ) et u est diagonalisable
(iii) $\mathrm{Im}(u - Id) \not\subset H$ (iv) Dans une certaine base, u a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in K^*$, $\lambda \neq 1$.

DEF 17 : On dit que u est une dilatation d'hyperplan H, de droite D, de rapport λ. On a alors $D = \mathrm{Im}(u - Id)$, $H = \ker(u - Id)$. Lorsque $\lambda = -1$, u est appelée une réflexion ($\mathrm{car}(K) \neq 2$).

REM 18 : Une dilatation d'hyperplan $H = \ker(\varphi)$, $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ est donc un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\forall x \in E$, $u(x) = x + \varphi(x) a$.

PROP 19 : Soit H un hyperplan de E, $H = \ker(\varphi)$, $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. Soit $u \in GL(E)$, $u \neq Id$ tel que $u_{|H} = Id_H$. LASSE :
(i) $\det(u) = 1$ (ii) u n'est pas diagonalisable
(iii) $D = \mathrm{Im}(u - Id) \subset H$ (iv) $\bar{u} : E/_H \to E/_H$ est l'identité
(v) $\exists a \in H, a \neq 0, \forall x \in E, u(x) = x + \varphi(x) a$
(vi) Dans une certaine base, u a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ (0) & & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

DEF 20 : On dit alors que u est une transvection d'hyperplan H et de droite D. On a $D = \mathrm{Vect}(a)$ et $D \subset H$ (donc $a \in H$).

REM 21 : Dans le cas des dilatations, la donnée de H, D, λ est équivalente à celle de u. Dans le cas des transvections u détermine D et H mais la réciproque est fausse ($\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

REM 22 : La donnée de $a \in D \subset H$ et $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker(\varphi)$ détermine u mais u ne détermine φ et a qu'à un scalaire près.

PROP 23 : Notons pour tout $x \in E$: $\tau(\varphi, a)(x) = x + \varphi(x) a$
Alors si $\tau = \tau(\varphi, a)$, on a $\tau^{-1} = \tau(\varphi, -a)$ et $\tau(\varphi, a)\tau(\varphi, b) = \tau(\varphi, a+b)$

PROP 24 : Soit τ une transvection de droite D, d'hyperplan H. Soit $u \in GL(E)$. Alors $u \tau u^{-1}$ est une transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$. Précisément, si $\tau = \tau(\varphi, a)$, on a $u \tau u^{-1} = \tau(\varphi \circ u^{-1}, u(a))$.

DEV 2

THM 25 : Toute matrice $A \in GL_n(K)$ s'écrit $A = \prod_{k=1}^{r} P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^{s} Q_j$ où $P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_s$ sont des matrices de transvection, $\lambda = \det(A)$, $D_n(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{n,n}$.

COR 26 : Les groupes $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs

COR 27 : Les ensembles $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs. Ce sont les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.

REM 28 : On a alors que $GL(E)$ est engendré par les dilatations et les transvections et $SL(E)$ est engendré par les transvections.

2) Groupes projectifs et sous-groupes dérivés [PER] [ROT]

DEF 29 : Le quotient de $GL(E)$ par son centre est appelé le groupe projectif linéaire et noté $PGL(E)$. De même, le quotient de $SL(E)$ par son centre est noté $PSL(E)$. On note $PGL_n(K)$ et $PSL_n(K)$ les quotients des groupes matriciels respectifs.

PROP 30 : $Z(PGL(E)) = Z(PSL(E)) = \{\overline{Id}\}$.

DEF 31 : Pour G un groupe, le sous-groupe dérivé de G, noté $D(G)$ est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[g, h] = g h g^{-1} h^{-1}$.

THM 32 : • $D(SL(E)) \subset D(GL(E)) \subset SL(E)$
• Pour $n \geq 3$, $D(SL(E)) = D(GL(E)) = SL(E)$
• Pour $n = 2$, $K \neq \mathbb{F}_2$, $D(GL(E)) = SL(E)$
• Pour $n = 2$, $K \neq \mathbb{F}_2$, $K \neq \mathbb{F}_3$, $D(SL(E)) = D(GL(E)) = SL(E)$.

III - Action de groupes sur les espaces de matrices

1) Action par translation : pivot de Gauss [ROT] +

THM 33 : L'application $(P, A) \in GL_n(K) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \mapsto PA \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ définit une action et deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même noyau

REM 34 : On peut définir de façon analogue une action à droite.

PROP 35 : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite $A' \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$

REM 36 : On obtient A' à partir de A en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A selon l'algorithme du pivot de Gauss.

DEF 37 : Les opérations élémentaires sur les lignes correspondent à la multiplication à gauche par des matrices élémentaires $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{i,i}$ (dilatation) et $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ $(i \neq j)$ (transvection)

Opération	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$
Matrices	$T_{i,j}(\lambda) A$	$D_i(\lambda) A$

REM 38 : Échelonner et réduire une matrice donne de nombreuses informations comme le rang, une base de l'image, les relations de liaison entre les colonnes...

2) Action par équivalence [ROT]

DEF 39 : On fait agir $GL_n(K) \times GL_m(K)$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ via $(P, Q, M) \mapsto PMQ^{-1}$. Deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes.

THM 40 : $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$.

COR 41 : Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.

3) Action par conjugaison [ROM]

PROP 42 : L'application $(P,A) \in GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \mapsto PAP^{-1}$ définit une action de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(K)$.

DEF 43 : Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables ou conjuguées.

REM 44 : Deux matrices semblables sont équivalentes.

PROP 45 : Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes. Elles ont donc même rang, trace, déterminant, polynômes caractéristique et minimal.

[MAN] THM 46 : (Frobenius) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une unique suite de polynômes unitaires $P_1, \dots, P_r$ tels que :
- $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $P_{i+1} | P_i$
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & C_{P_r} \end{pmatrix}$ où C_{P_i} est la matrice compagnon de P_i.

DEF 47 : La suite $(P_1, \dots, P_r)$ est la suite des invariants de similitude de u.

COR 48 : Deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont la même suite d'invariants de similitude.

4) Action par congruence [ROM]

PROP 49 : L'application $(P,A) \in GL_n(K) \times \mathcal{S}_n(K) \mapsto PA\,{}^tP \in \mathcal{S}_n(K)$ définit une action de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{S}_n(K)$ (matrices symétriques)

DEF 50 : Deux matrices dans la même orbite pour cette action sont dites congruentes.

PROP 51 : Deux matrices congruentes représentent une même forme quadratique dans deux bases différentes.

THM 52 : (Sylvester) : ① Pour $K = \mathbb{C}$ deux matrices symétriques A, B sont congruentes si et seulement si elles ont même rang.
② Pour $K = \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{S}_n(K)$ sont congruentes si et seulement si elles ont même signature
③ Pour $K = \mathbb{F}_q$, deux matrices symétriques inversibles A, B sont congruentes si et seulement si elles ont même discriminant

IV – Le groupe orthogonal

Ici, $K = \mathbb{R}$ [ROM] [PER]

On munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ pour en faire un espace euclidien.

DEF 53 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un endomorphisme orthogonal lorsque : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.
On note $O(E)$ l'ensemble de ces endomorphismes.

PROP 54 : $u \in O(E) \iff \forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$ (u est une isométrie)

PROP 55 : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

THM 56 : $u \in O(E)$ ssi sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale i.e vérifie ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$.

COR 57 : $\forall u \in O(E)$, $\det(u) \in \{-1; 1\}$.

THM 58 : $SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$ est un sous-groupe de $O(E)$ d'indice 2 donc distingué.

THM 59 : Le groupe $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales.

THM 60 : Pour $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements.